Laminations
par Adrien Boulanger.
le jeudi 28 janvier.

- I/ Introduction à l'espace de Teichmüller.

$S =$ surface sans bord.

Déf : On appelle espace de Teichmüller noté $\mathcal{T}(S)$ l'espace des structures complexes $/\mathrm{Diff}_0$.

Thm : Coordonnées isothermes _ Gauss (voir Henri Paul S^t Gervais)

Structures complexes $\Longleftrightarrow$ classes conformes de métriques.

$$g_1 \sim g_2 \quad \Longleftrightarrow \quad g_2 = f\, g_1 \qquad f > 0.$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Teich}(S) = \{\text{classes conformes}\}/_{\mathrm{Diff}_0(S)}$$

Thm : (Uniformisation de Riemann)

S complexe simpl. connexe $\Rightarrow$ $\exists$ biholomorphisme $\phi : X \to A = \begin{cases} S^2 \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{D}. \end{cases}$

$$A = \begin{cases} \mathbb{H}^2 & \text{courbure} = -1. \\ \mathbb{C} & \text{courbure} = 0 \\ \hat{\mathbb{C}} & \text{courbure} = 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ S surface complexe, $\tilde{S}$ $\qquad \tilde{S} \to A$

$$\mathcal{T}(S) = \{\text{métriques hyperboliques}\}/_{\mathrm{Diff}_0}. \qquad \text{pas pratique.}$$

Thm : $\boxed{\mathcal{T}(S) \simeq \rho : \pi_1(S) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)/_{\mathrm{conj}}.}$

Idée : g métrique hyperbolique : on lui associe ρ. (c'est l'action du π_1).

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{S}, \tilde{g}) & \xrightarrow{h} & (\mathbb{H}^2, hyp) \\ \downarrow & & \\ (S, g) & & \end{array}$$

$$\rho_g(\gamma)(x) = h(\rho_*(\gamma)\, h^{-1}(x)).$$

mais ça dépend du choix de h !

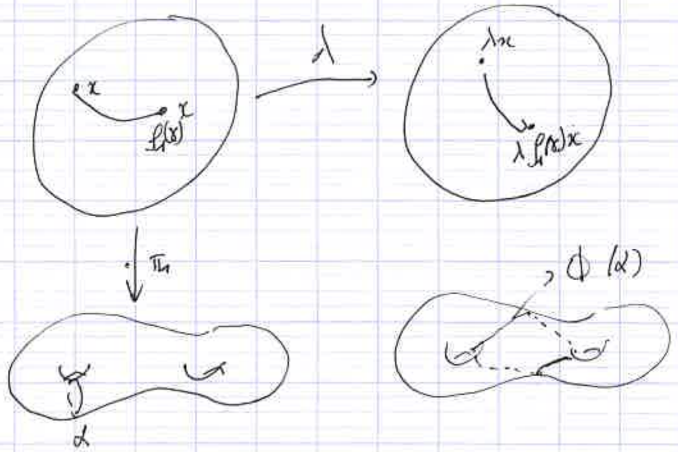
comment ?

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{H}^2, hyp) \arrow[d, "h_2 \circ h_1^{-1} = \phi = \text{isométrie de } \mathbb{H}^2"] \\ \tilde{S} \arrow[ur, "h_1"] \arrow[r, "h_2"] \arrow[d] & (\mathbb{H}^2, hyp) \\ S \arrow[ur, "\rho_2"] \arrow[uur, bend left, "\rho_1"] & \end{tikzcd}$$

Prenons g_1 et g_2 sur S. t.q $\exists\ \phi \sim id$ $\phi^* g_2 = g_1$.
Prenons pour l'instant $\phi \in diff(S)$. (pas forcément isotope à l'id.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "\lambda"] & \mathbb{H} \\ \tilde{S} \arrow[u, "\rho_1"] \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, shift left] & \tilde{S} \arrow[u, "\rho_2"'] \arrow[d, shift left] \\ S \arrow[u, shift left, "\rho_*"] \arrow[r, "\phi"] & S \arrow[u, shift left, "\rho'"'] \end{tikzcd}$$

Donc, il faudrait encore montrer la bijectivité.



$\lambda_* \rho_1 = \rho_2 \circ \phi_*$.

Le cas du tore.

$\mathcal{T}(\mathbb{T}_2)$

$\pi_1(\mathbb{T}_2) = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$.

Biholomorphisme de $\mathbb{C}$ $= \{\alpha z + \beta\}$.

donc on doit réaliser a et b.

$f(a) = \alpha z + \beta$ Nécessairement $\alpha = 1$.

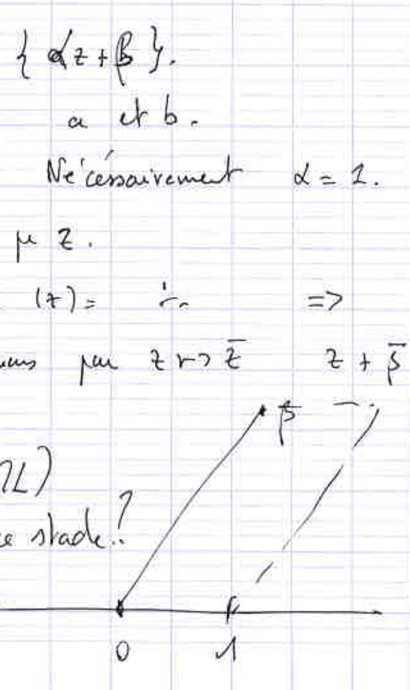
Prenons $\mu \in \mathbb{C}$ $\phi_\mu\ z \mapsto \mu z$.

$\phi_{\mu^{-1}} \circ f(a) \circ \phi_\mu (z) = \ldots \Rightarrow z \mapsto z + 1$.

$f(b) = z \mapsto z + \beta$. conjuguons par $z \mapsto \bar{z}$ $z + \bar{\beta}$

$\Rightarrow \beta \in \mathbb{H}$.

pourquoi l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$ n'est-elle pas considérée à ce stade.?



structure plate sur le tore pour chaque β.

II/ Compactification de $\mathcal{T}(S)$ par Thurston.

Définitions : $\mathcal{S}$ = { courbes fermées simples sur S }.

Fonctions longueur : $l : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$.
$\gamma \mapsto \inf\{\alpha \in [\gamma] \quad l_g(\alpha)\}$.

Fonctions intersection : $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$.
$(\gamma, \delta) \mapsto \inf_{\substack{\alpha \in \gamma \\ \beta \in \delta}} (\alpha, \beta)$

Lemme : l'inf est réalisé par les géodésiques.

Ingrédients de la preuve :

$\mathcal{L} \quad \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ $\qquad$ $\mathcal{L}$ réalise un homéo.
$g \mapsto \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$
$\gamma \mapsto l_g(\gamma)$.

sur $(\mathbb{R}^+)^{\mathcal{S}}$ on met la topologie faible.

$i(a, s_n) = p_n$
$i(b, s_n) = q_n$
$i(a+b, s_n) = p_n q_n$

$f_n \in C$

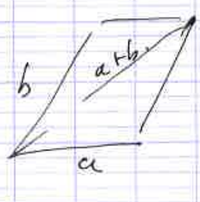
$f_n \to f \quad \exists \lambda_n$ t.q.
$\lambda_n f_n(\gamma) \to f(\gamma)$.

$\frac{p_n}{q_n} \to \alpha$.

Projectiviser, c'est normaliser le volume.

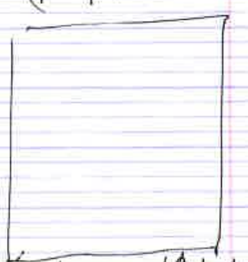
$s_n = (p_n, q_n)$

$a, b, a+b$ déterminent Teichmuller.



$(p_n, q_n) \to \alpha$

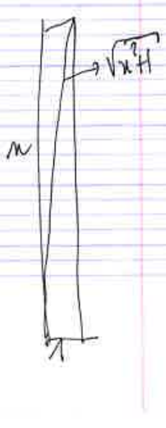
$\mathcal{T}(S) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^3$
$g \longmapsto (\underbrace{l_g(a)}_{l_1}, \underbrace{l_g(b)}_{l_2}, \underbrace{l_g(a+b)}_{l_3})$.



$\{ l_i + l_j \geq l_k. \}$

$\lambda_n = \frac{1}{q_n} \quad \lambda_n s_n \to (\alpha, 1, 1-\alpha)$ ~~$\not\in$~~ Dans le bord. $l_k = l_i + l_j$. est obtenu comme la limite.

On spécifie $l_1 = 0 \quad l_2 = l_3 = 1$.



$i_a : \gamma \mapsto i(a, \gamma)$.

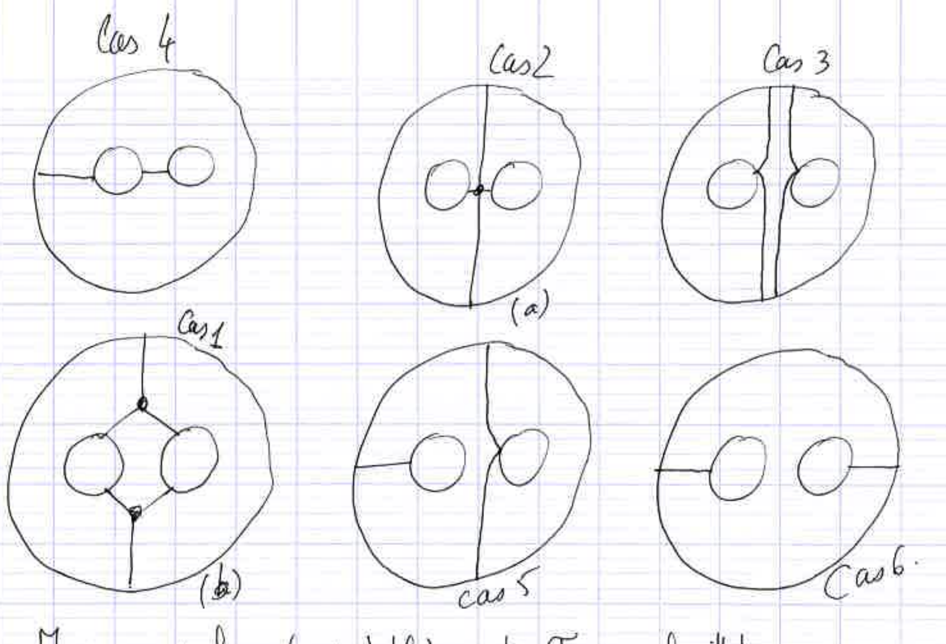
On prend λ_n.

$i_a(a) = 0$ et
$i_a(a+b) = i_a(b) = 1$.

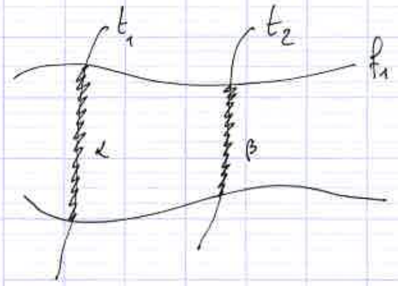
Dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \to \mathcal{T}(T_2)$
$\nwarrow i$
$\mathcal{S}$

$\mathbb{P}(\mathcal{T}(T_2)) \sqcup i(\mathcal{S})$ est compact.

Feuilletages mesurés sur les surfaces.



M une surface (orientable) et $\mathcal{F}$ un feuilletage.
$\mathcal{F}$ est mesuré si $\exists\ \mu$ mesure sur les chemins transverses à $\mathcal{F}$ t.q la définition est cohérente.



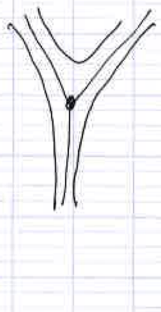
$\mu(\alpha) = \mu(\beta)$ pour rendre la chose cohérente.

On peut s'autoriser quelques singularités, de nature particulière.

On a envie de se limiter à μ régulière / Lebesgue.

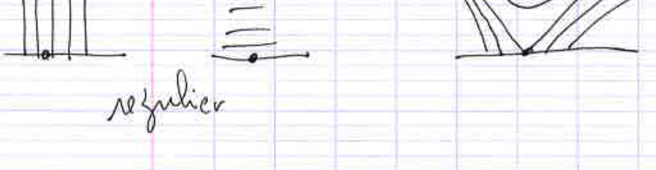
Pour tout point, il existe une carte (x, y) et $\mu = dy$.

Les pts singuliers :

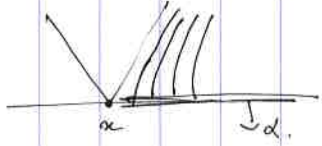


à l'intérieur.

au bord



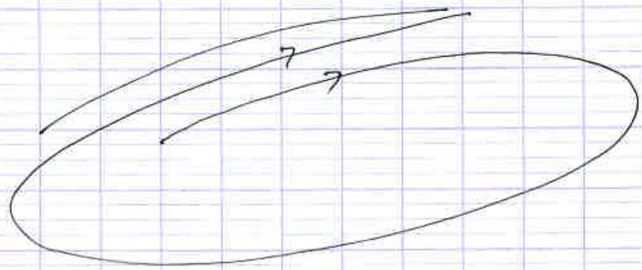
régulier



Thm (Récurrence de Poincaré).

Soit α un arc du bord transverse à $\mathcal{F}$. La feuille L_x va soit sur un point singulier, soit sur un pt du bord.

En gros, l'idée est que pour un feuilletage mesuré on ne peut pas avoir de situation comme ceci.



parce que ça contredirait l'invariance.

Corollaire : Si une feuille L n'est pas fermée dans $M \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ et α est un arc transverse à $\mathcal{F}$ coupant L, alors $\alpha \cap L$ est infini.

Formule d'Euler-Poincaré

$$2\chi(S) = \sum_{s \in \mathrm{Sing}} (2 - P_s)$$

On prend un revêtement double pour avoir une orientation sur les feuilles $\Rightarrow$ un chp de vecteur $\Rightarrow$ la formule des indices.

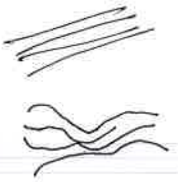
Proposition : Il n'existe pas de disque D à bords anguleux $\partial D = \alpha \cup \beta$. α un bout de feuille. et β arc quasi transverse

On identifie certains des feuilletages.

1°) Par isotopie.

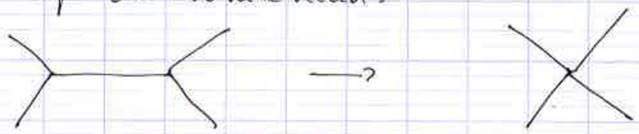
2°) Par les opérations de Whitehead.

$\mathcal{MF}(S)$ comme l'ens. des feuilletages mesurés quotienté par :



1°) Les isotopies.

2°) les op. de Whitehead.



$\mathcal{MF}(S)$ est censé être le bord de Teichmuller.

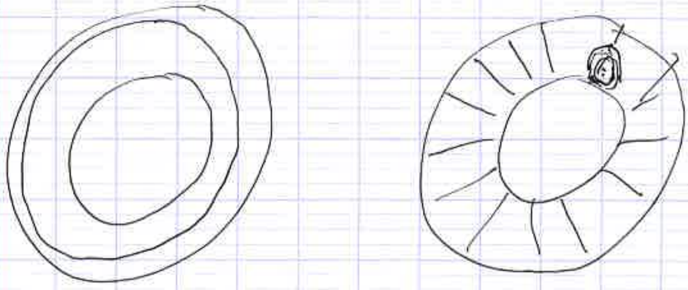
$$I_* \quad \mathcal{MF} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$$

$$\gamma \in \mathcal{S} \longrightarrow \int_{\gamma} \mathcal{F}$$

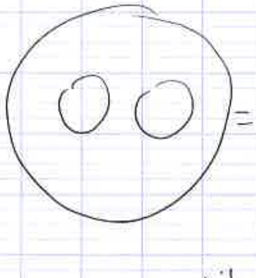
Classification des feuilletages:

Rq: On peut associer un feuilletage associé à chaque courbe.

Classification:



Sur



$= P^2 \qquad = -1.$

$= 2 - 2g - b.$

soit une singularité avec 4 séparatrices. (a)

$$-2 = \sum (2 - P_S)$$

soit il y en a 2 avec 3 séparatrices (b).

On introduit la notion de bon feuilletage.

Déf: Un feuilletage est un bon feuilletage. si ~~ces~~ ~~chaque~~ et les composantes du bord ~~ne~~ ne sont pas des feuilles entières sans singularité.

Thm 1°) Toute feuille d'un feuilletage du pantalon est fermée dans le complémentaire des singularités.

2°) Si le feuilletage est bon, il n'existe pas de cycle de feuilles à l'intérieur du pantalon.

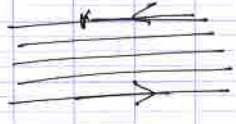
Corollaire : pour les bons

1°) Soit elles vont de bord à un bord.
2°) soit elles vont du bord à une singularité
3°) soit d'une singularité à une singularité.

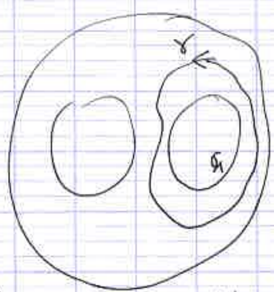
1°) Soit L une feuille non fermée de $\mathcal{F}$ dans P^2_* sing.

On a.

ou bien



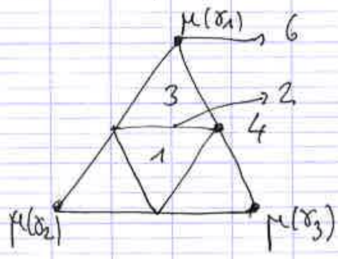
On approche $\alpha \cup \beta$ par γ transverse à $\mathcal{F}$.
γ doit être forcément autour d'une jambe du pantalon.

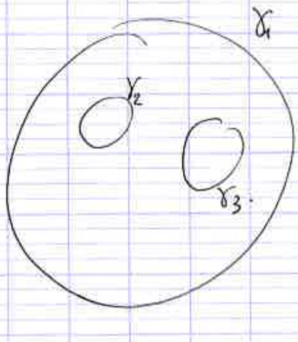


$\exists \gamma_1$ / γ et γ_1 bordent un anneau.
~~donc~~ et la feuille L intersecte γ une seule fois. donc γ_1 aussi !

Ainsi, on obtient des coordonnées sur l'espace des feuilletages.

Thm : L'application sur $\mathcal{F}(P^2) \to \mathbb{R}^3$ qui à un bon feuilletage associe le triplet (m_1, m_2, m_3) $[\mu(\gamma_1)\ \mu(\gamma_2), \mu(\gamma_3)]$





Avec les feuilletages qui ne sont pas bons ?
Il paraît que c'est à peu près la m̂ chose.
Suite dans 2 semaines.