LE THÉORÈME DE LA LIMITE DOUBLE II

I] Notations, énoncé ~~et~~ idée de preuve.

Not : Σ surface compacte de genre ≥ 2

$\Gamma = \pi_1(\Sigma)$

$\phi \in \mathrm{Diff}(\Sigma)$ pseudo-Anosov

m : métrique de référence sur Σ

$\sigma_i^+ : (\phi^*)^i m$

$\sigma_i^- : (\phi^*)^{-i} m$ $\quad \rho_i \in QF(\Gamma)$ de paramètres de Bers (σ_i^+, σ_i^-)

$\searrow \rho_i$

Rappel : $\sigma_i^{\pm} \xrightarrow[i \to \infty]{} \lambda^{\pm} \in \mathcal{PML}(\Sigma)$ (* Compactification de $\mathcal{T}(\Sigma)$ *)

· Si $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$, alors $\phi_*^i(\gamma) \xrightarrow[i \to \infty]{} \lambda^+$ (* Topologie de Hausdorff)

$\phi_*^{-i}(\gamma) \xrightarrow[i \to \infty]{} \lambda^-$

Rappel : (Alternative) : À extraction près :

→ Soit ρ_i converge dans $\mathrm{Hom}^{f.d}(\Gamma, \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3))$

→ Soit il existe $\varepsilon_i \to 0$ telle que $(\varepsilon_i \mathbb{H}^3, \rho_i) \longrightarrow (T, \rho)$

au sens de ~~la~~ topologie de Gromov équivariante (Paulin)

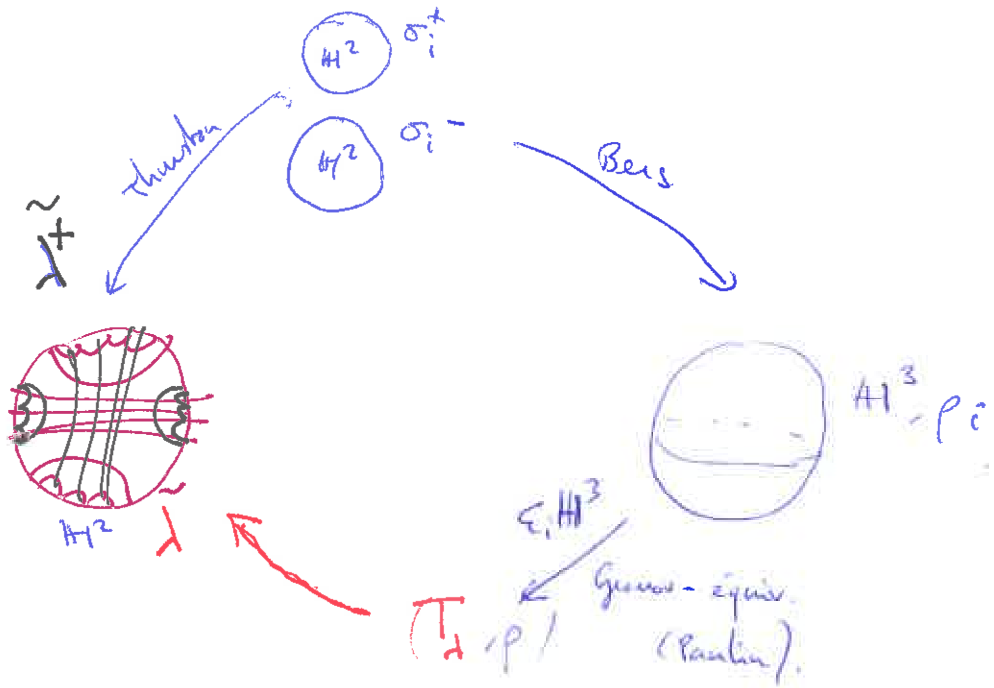
Rq : (Skora (Thm)) : Dans le deuxième cas, T est l'arbre dual d'une lamination mesurée λ : $T = T_\lambda$

Thm (limite double (* version simplifiée *)) :

On n'est pas dans le ~~premier~~ deuxième cas

Stratégie : • On raisonne par l'absurde : On suppose qu'il existe $\varepsilon_i \to 0$ telle que $(\varepsilon_i \mathbb{H}^3, \rho_i) \xrightarrow[\text{Paulin}]{} (T_\lambda, \rho)$.

(H) $\lambda^+ \pitchfork \lambda$



• Un élément de Γ ~~de~~ déplacement non nul dans T_λ déplace beaucoup dans $\mathbb{H}^3$ (dépl. non nul dans $\varepsilon_i \mathbb{H}^3$).

• Si μ est proche de λ^+, alors μ déplace beaucoup dans $\mathbb{H}^3$.

• On choisit une suite $(\gamma_i^+)_i$ de Γ telle que $\gamma_i^+ \to \lambda^+$.

On a : $\dfrac{\ell_i^+(\gamma_i^+)}{\ell_n(\gamma_i^+)} \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$

D'après le lemme d'Ahlfors, $\ell_{\mathbb{H}^3}(\rho_i(\gamma_i^+)) \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$

(* Pour obtenir une contradiction, on cherche à minorer unif. les déplacements des $\rho_i(\gamma_i^+)$ *).

II | Réalisation de laminations et réseaux ferroviaires

def : Une lamination μ est réalisée dans T_λ s'il existe $f : \tilde{\mu} \to T_\lambda$ continue, Γ-équivariante et injective sur chaque feuille de $\tilde{\mu}$.

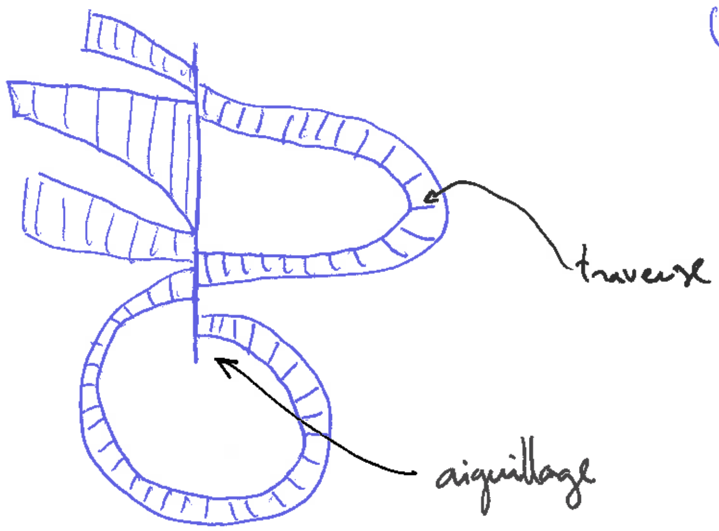
Rappel : l'application quotient $f : \mathbb{H}^2 \to T_\lambda$ est Γ-équivariante, monotone, et non constante sur les (demi) feuilles de $\tilde{\mu}$.

(H) μ lamination géod. mes. arationnelle (pour simplifier). transverse à λ.

But : Réaliser μ, et les géodésiques proches de μ, dans T_λ.

def : Un réseau ferroviaire $\mathcal{R}$ dans Σ est une ~~famille~~ réunion finie de rectangles plongés dans Σ ; $R_i = \mathrm{Im}([0,1]\times[0,1] \to \Sigma)$ qui s'intersectent au plus sur des segments de leurs côtés verticaux et tels que toute comp connexe réunion de côtés verticaux est un arc plongé. Un tel arc est appelé aiguillage.

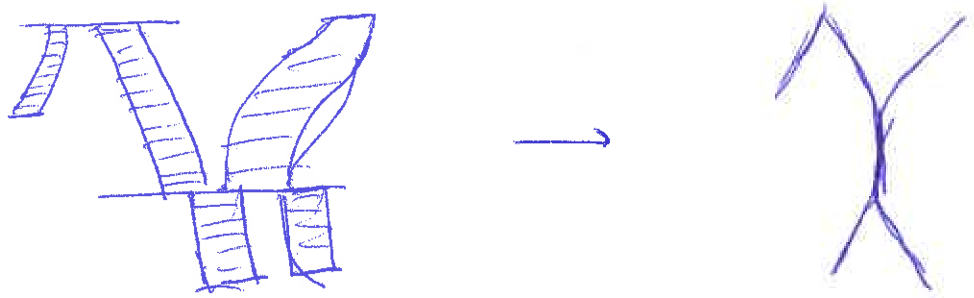
(+ traverses)



def : Une lamination géod. μ est portée par $\mathcal{R}$ si $\mu \subseteq \mathcal{R}$ et chaque feuille de μ est transverse aux traverses des rectangles de $\mathcal{R}$.

<u>Rq</u> : R se relève en un réseau ferroviaire $\tilde{R}$ sur H^2.
$\tilde{R}$ est Γ-équivariant.

<u>déf</u> : R est réalisé dans T_λ s'il existe $f : \tilde{R} \to T_\lambda$, Γ-équivariante, constante sur les traverses et monotone sur tout arc transverse aux traverses
+ non cste.



<u>Rq</u> : monotone + non cste $\Leftarrow$ injectif (+ ne coûte rien +).

- Si μ est portée par R et R est réalisé dans T_λ, alors μ est réalisée dans T_λ. De plus,
- ~~μ est~~ Il existe un voisinage $U(\mu)$ de μ dans $PMS(\Sigma)$ tel que toute lamination $\mu' \in U(\mu)$ est portée par R.

<u>Thm</u> : μ est réalisée dans T_λ

<u>dem</u> : On va construire un réseau ferroviaire R portant μ et qui est réalisé dans T_λ

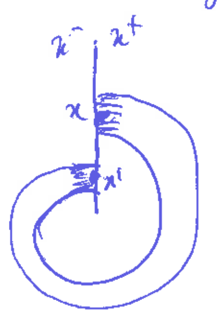
Soit K : 'petit' arc dans une feuille de λ.

<u>Rq</u> : K intersecte une infinité de fois toutes les demi-feuilles de μ.

• Soit $t_0 > 0$ tel que $\forall v \in \mathcal{K}$ $v + t_0$ et $v - t_0$ ont des images distinctes de celles de v par $f : \tilde{\mu} \to T_d$

• Quitte à rétrécir $\mathcal{K}$, OPS que le 1er temps de retour de toute feuille est $> t_0$

• Au voisinage de chaque $x \in \mathcal{K}$, on construit un intervalle I_x^+ qui est envoyé en un intervalle $I_{x'}^+$ en suivant les feuilles de μ.



On peut compléter I_x^+, $I_{x'}^+$ en un rectangle plongé de bords disjoints de μ (*structure de Cantor *)

→ On peut fabriquer des traverses

→ Idem. I_x^-

• Par compacité, on peut extraire une famille finie de rectangles tels que I_x^+, I_x^- recouvrent les deux côtés de $\mathcal{K}$.

• Quitte à regrouper ou diviser des rectangles, on obtient un réseau ferroviaire qui porte μ et qui est réalisé dans T_d (*car les tps de retour sont $> t_0$)

$\square$

Rq : Ce réseau a un seul aiguillage.

III) δ-réalisations dans $\mathbb{H}^3$ et fin de la preuve

Thm (4.0.1) : Soit $N > 0$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{V}(\mu)$ de μ dans $\mathcal{PML}(\Sigma)$ tel que, pour toute géod. $\mu' \in \mathcal{V}(\mu)$ et tout i assez gd, on ait

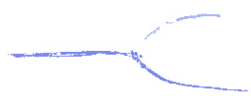
$$\frac{l_i(\mu')}{l_m(\mu')} \geq N.$$

Idée : (* On aboutit à une contradiction si on montre ce thm. *)

- δ-réaliser un réseau ferroviaire portant μ dans $\mathbb{H}^3$.
- Arguments de géométrie hyperbolique pour minorer unif. $l_i(\mu')$.

def : Soit $\delta > 0$. Une δ-réalisation de $\mathcal{R}$ dans $(\mathbb{H}^3, \rho_i)$ est une application continue, Γ-équivariante, constante sur les traverses $f : \tilde{\mathcal{R}} \to \mathbb{H}^3$ telle que :

- ~~f restreinte~~ L'image d'un arc transverse aux traverses dans R_i est un ~~segment~~ segment géod. non trivial.
- Si R_i, R_j sont deux rectangles de deux côtés opposés d'un aiguillage, alors $f(R_i)$ et $f(R_j)$ forment un angle dans $[\pi - \delta, \pi]$.



(* En deux temps *). Fixons $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$.

1ère tentative : δ-réaliser $\mathcal{R}$:

Rappel : on a construit une réalisation $f : \tilde{\mathcal{R}} \to T_\lambda$ à 1 seul aiguillage κ.

- $f(\tilde{\kappa}) = \{p\} \in T_\lambda$

<u>Not</u> : $\mathcal{G} = \{ g \in \Gamma \mid \exists R_i$ rectangle de $\tilde{R}$: $R_i \cap \tilde{x}$ et $g(R_i) \cap g(\tilde{x}) \neq \emptyset \}$

- $\mathcal{G}$ est fini et a des éléments 'positifs' et 'négatifs'.

<u>Rq</u> : $(\varepsilon_i \mathbb{H}^3, p_i) \xrightarrow[\text{Paulin}]{\text{G. ég.}} (T_\lambda, p)$

Il existe, pour i assez grand, $p_i \in \mathbb{H}^3$ tel que

$$| d_i(g(p_i), g'(p_i)) - d_{T_\lambda}(g(p), g'(p)) | < \varepsilon$$

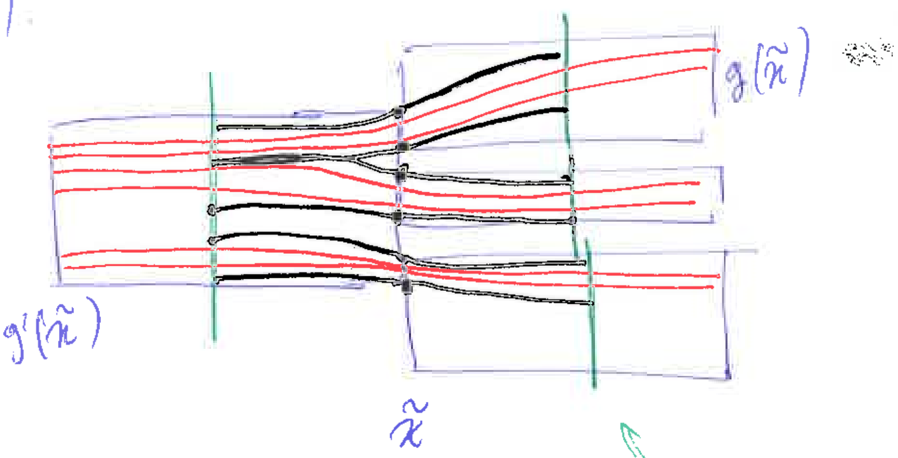
$\forall g, g' \in \mathcal{G}$

(* Pas une δ-réalisation a priori *).

2ème tentative : Première subdivision.

<u>def</u> : (Première subdivision de R) : $\mathcal{R}'$: réseau ferroviaire

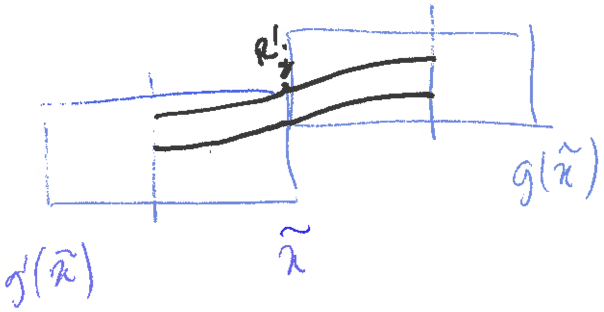
(* dessin *).



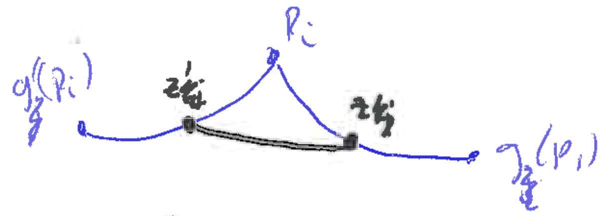
nouveaux aiguillages

" traverses médianes.

On construit $F_i : \tilde{R}' \longrightarrow (\mathbb{H}^3, p_i)$



$\longrightarrow$



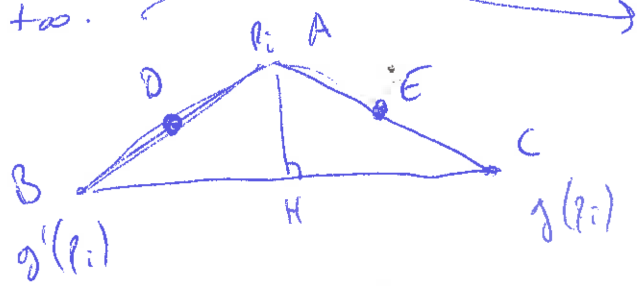
$\left[\begin{array}{l} g' \text{ négatif} \\ g \text{ positif} \end{array}\right]$

(* On va m.q. F_i est une δ-réalisation de R' pour i assez gd *)

Not : $m = \inf\{ d_{\tilde{x}}(p, g(p)) \mid g \in \mathcal{G}\}$.

(H) $10\varepsilon \leq m$.

Rq. Pour i assez grand, $(g'(p_i), g(p_i))$ est le plus long côté du triangle $(g'(p_i), p_i, g(p_i))$ et les trois longueurs du Δ tendent vers $+\infty$ quand $i \to +\infty$. $\longrightarrow AB \geq \frac{9\varepsilon}{\varepsilon_i}$ $(m \geq 10\varepsilon)$.



Rq : $H \in [BC]$; $AB + AC - BC \leq 3\varepsilon$ (*) (CV de Gromov-éq) vers 3 pts alignés

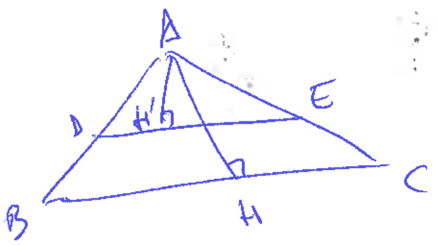
Lemme $\exists k \in \mathbb{R}^+$ pour tout triangle rectangle en H ABH on, $|AH + BH - AB| \leq k$

Prop a) Les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{AED}$ tendent vers 0 quand $i \to +\infty$

b) Il existe $m' > 0$ tel que $DE \geq m'$ pour i assez grand

($m' = m/3$ convient)

dém : a) On a $|BC + AB - AC| = 2AH + O(1)$



$$2AH \leq \frac{4\varepsilon}{\varepsilon_i} \leq \frac{1}{2}\min(AB, AC) \leq \min(AD, AE)$$

(pour i assez grand) (*)

Donc $AH' \leq \frac{1}{2}\min(AD, AE)$. ~~[illegible]~~

→ loi des sinus sur ADH' → $\sin(\widehat{ADH'}) = \dfrac{\sinh(AH')}{\sinh(AD)} \xrightarrow[i \to +\infty]{} 0$

b) Sur le triangle ADH' :

$$DH' \geq AD - AH' \geq \frac{1}{2}AD \geq \frac{m-\varepsilon}{4\varepsilon_i}$$

D'où $DE \geq \dfrac{m-\varepsilon}{2} \geq \dfrac{m}{3\varepsilon_i}$

$\square$

CCL :

prop : (4.14) : ~~Pour tout~~ Soit $\delta \in]0, \pi[$, Pour i assez grand,

- F_i est une δ-réalisation de $\mathcal{R}'$
- Il existe $m' > 0$ tel que les longueurs des segments géodésiques de $F_i(\mathcal{R}')$ sont toutes $> \dfrac{m'}{\varepsilon_i}$

Fin de la preuve de la limite double :

- Il existe un voisinage $\mathcal{O}(\mu)$ de μ tel que toute géodésique $\mu' \in \mathcal{O}(\mu)$ est portée par $\mathcal{R}'$.

• Si $\mu = \lambda^+$, γ_i^+ est portée par $\mathcal{R}'$ pour i assez grand.

(* On va comparer $l_i(\mu')$ à $l_{\mathbb{H}^3}(F_i^*(\mu'))$ *).

Soit $\mu' \in \mathcal{V}(\mu)$. On a :

• $l_{\mathbb{H}^3}(F_i^*(\mu')) = \sum_j c_j(\mu')\, l_j^c$

$c_j(\mu')$: # de passages dans R_j ; l_j^c : largeur de R_j

Fait : • $F_i^*(\mu')$ est une géodésique brisée de segments de longueur $\geq m'$ et angles $\in \,]\pi-\delta, \pi[$.

• Si δ est assez petit, $F_i^*(\mu')$ est homotope à une géod. $\overline{F_i^*(\mu')}$ et il existe $\eta > 0$, uniforme, t.q. $l(\overline{F_i^*(\mu')}) \geq \eta\, l(F_i^*(\mu'))$

$$l_i(\mu') \geq \frac{\eta}{\varepsilon_i}\, l_{\mathbb{H}^3}(F_i^*(\mu')) \geq \frac{\eta}{\varepsilon_i} \sum_j c_j(\mu')\, \frac{m'}{\varepsilon_i}$$

$$\geq \frac{\text{cte}}{\varepsilon_i}\, l_\mu(\mu')$$

□